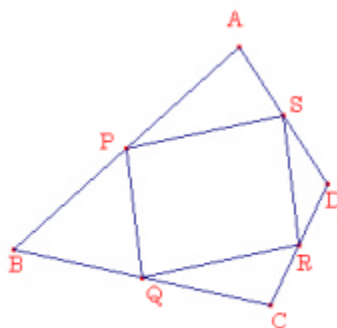


# 四角形の性質の探求

～ 図形の性質の発見ツールとしてのCABRI の利用例 ～

上原永護（群馬県前橋市桂萱中学校）  
E-MAIL: mow@mail.wind.ne.jp

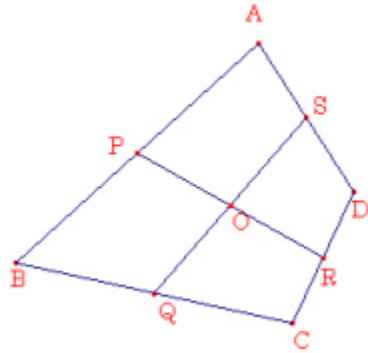
1 . はじめに  
中学2年の図形の学習では、三角形や四角形、相似な図形の性質について学習する。その学習内容と関連する問題に、四角形の4つの辺の中点を結んでできる図形の性質(Pierre Varignon(1654～1722)によって発見された)について、中点連結定理を利用して、外部の図形との関連等を探求する問題がある。



この問題は、ほとんどの教科書の例題に取り上げられているように、単純かつ明快で、その性質の美しさに興味・関心をもち、幾何学に惹かれるものも少なくない。また、コンピュータの作図ツールを利用することにより、その性質の普遍性に気づき、実感することができる。その図形のもつ性質、作図ツールのもつ機能がともに活かされる素晴らしい教材であると考えられる。愛知教育大学 数学教室 飯島康之氏は、「4角中点」というホームページでその図形の性質に関する研究成果を公開している。

<http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc/world/4-chu/i-01.htm>

飯島氏の探求による、四角形ABCDの面積を測る方法に興味をもち、この図形を分割して、その面積を測る方法を探ることにした。この図形を分割して、その面積を測る方法を探ることにした。この図形を分割して、その面積を測る方法を探ることにした。



そこでCabriGeometry（以下CABRI）の面積測定機能を利用して、分割してできた4つの四角形の面積を測定した。四角形ABCDとの関連は全くないように見えたが、計算機能を利用して調べてみると、四角形ABCDを変形させても、次の関係が成り立つことが分かった。

$$\begin{aligned}
 & \text{四角形 } A P O S + \text{四角形 } C R O Q \\
 &= \text{四角形 } B Q O P + \text{四角形 } D S O R \\
 &= \text{四角形 } A B C D \div 2
 \end{aligned}$$

そこで、このような分割方法を行った場合の四角形の性質について調べることにした。

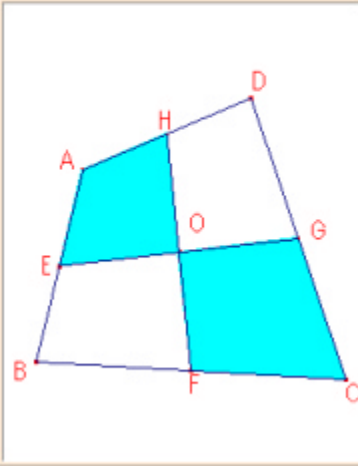
## 2. 研究の内容

私のホームページ（以下HP）「CABRIの部屋」（<http://www2.wind.ne.jp/mow/math/cabri/>）にCABRIを利用して作成した図形の問題及びそのデータを公開している。四角形の性質の探求を行いながら、調べた図形を問題としてHPにした。簡単なものは、発見した性質を一切表示していないが、複雑なものは非表示の状態です。データ内に埋め込んでおいた。

以下は、その探求の過程に従って、CABRIのデータ及びCABRIを使って気づいた図形の性質である。

# (1)二等分の場合

## 四角形の分割



図のように、四角形ABCDの中点を、E、F、G、Hとし、E GとFHの交点をOとします。  
EGとFHによって4つに四角形ABCDを分割するとき、水色の四角形は四角形ABCDとどのような関係があるでしょうか。

分かった人は、こちらへ・・・  
(GIFファイルの添付もできます)



CABRI IIのデータでは、点A、B、C、Dを移動させることによって図形を変形、移動できます。

CABRI II (d45)のデータはここからダウンロードできます。

Download

先に述べた通り、C A B R Iで調べてみると水色部分の面積の合計は、外側の四角形の面積の半分となっている。また、中学2年での証明は次のようにすることができる（以下、証明は紙面の都合で簡略化）。

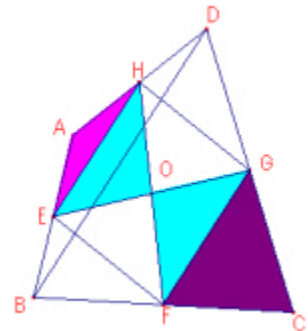
< 証明 >

中点連結定理より、A E B と A B Dの相似比は1 : 2、したがって、面積の比は1 : 4となるから、C G FとC D Bも同様にして

$$\begin{aligned}
 & A E B + C G F \\
 &= ( A B D + C D B ) / 4 \\
 &= \text{四角形 } A B C D / 4 \quad \dots
 \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
 & B F E + D H G \\
 &= ( A B C + C D A ) / 4 \\
 &= \text{四角形 } A B C D / 4 \quad \dots
 \end{aligned}$$



、より

$$\begin{aligned}
 & A E B + C G F + B F E + D H G \\
 &= \text{四角形 } A B C D / 2
 \end{aligned}$$

したがって、  
四角形 E F G H = 四角形 A B C D / 2      . . .

中点連結定理より、四角形 E F G H は平行四辺形であるから、 $E O = G O$ 、よって、底辺と高さが等しい三角形だから、

$$F G O = E F O, \quad H E O = G H O$$

また、 $H O = F O$  だから同様に、

$$E F O = H E O, \quad G H O = F G O$$

よって、より

$$\begin{aligned} H E O + F G O &= \text{四角形 } E F G H / 2 \\ &= ( \text{四角形 } A B C D / 2 ) / 4 \\ &= \text{四角形 } A B C D / 4 \quad \dots \end{aligned}$$

より

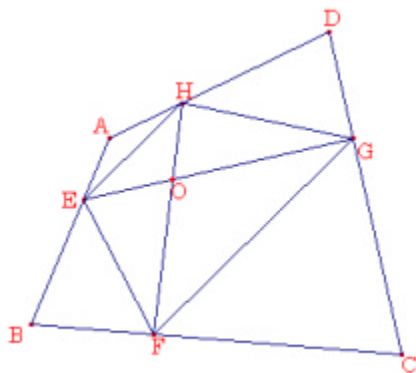
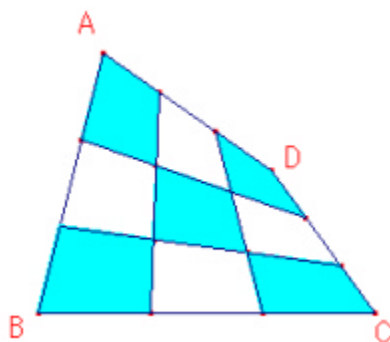
$$\begin{aligned} &\text{四角形 } A E O H + \text{四角形 } C G O F \\ &= ( A E B + H E O ) + ( C G F + F G O ) \\ &= ( A E B + C G F ) + ( H E O + F G O ) \\ &= \text{四角形 } A B C D / 4 + \text{四角形 } A B C D / 4 \\ &= \text{四角形 } A B C D / 2 \end{aligned}$$

## (2) 三等分の場合

同様の分割方法を行っていくと、各辺を三等分した場合は、右の図のようになる。

この場合、水色の部分の面積の合計は、四角形 A B C D の  $5/9$  となる。

ここで、次の図のように分割したとき、その辺の分割点を結ぶとその線分も同じ比に分けられるという性質がある。



< 証明 >

左の図のように

$$\begin{aligned} A E : E B &= A H : H D \\ &= B F : F C = D G : G C \\ &= 1 : t \\ &\text{となっているとき、} \\ &E H // B D // F G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E H : B D &= 1 : ( 1 + t ) \\ F G : B D &= t : ( 1 + t ) \end{aligned}$$

したがって、  $EH : FG = 1 : t$   
 よって、  $EO : OG = HO : OF = 1 : t$

従って、内部に「(2)二等分の場合」の考えを用いることができるので、分割された各部分の面積を数字 1 ~ 9 を用いて表すと

$$\begin{aligned} 1 + 9 &= 2 + 8 \\ 3 + 9 &= 2 + 4 \\ 5 + 9 &= 4 + 6 \\ 7 + 9 &= 6 + 8 \end{aligned}$$

左辺、右辺をそれぞれ加えて

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 9 + 9 + 9 \\ = 2 + 2 + 4 + 4 + 6 + 6 + 8 + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + 3 + 5 + 7 + 9) + 9 \times 3 \\ = (2 + 4 + 6 + 8) \times 2 \end{aligned}$$

$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 3 + 9 \times 3 = (2 + 4 + 6 + 8) \times 2 + (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 2$$

$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 3 + 9 \times 3 = (2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 2$$

$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 3 + 9 \times 3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \times 2$$

$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 3 + 9 \times 3 = \text{四角形 } ABCD \times 2$$

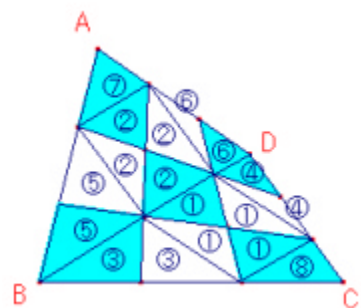
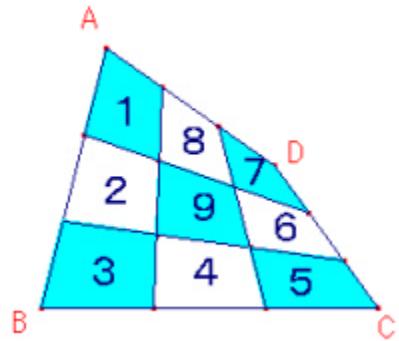
$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9) + 9 = \text{四角形 } ABCD \times 2 / 3$$

また、右の図で同じ数字の部分は面積は同じであるから

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ABCD \\ = 4 ( \quad + \quad ) + 2 ( \quad + \quad ) \\ + 2 ( \quad + \quad ) + \quad + \quad \end{aligned}$$

「2等分の場合」と同様にして、  
 $\quad + \quad = \quad + \quad$ 、  
 $\quad + \quad = \quad + \quad$

また、  $\quad + \quad = \text{四角形 } ABCD / 9$



従って、

$$\text{四角形 } A B C D = 4 \left( \frac{1}{9} \right) + 2 \left( \frac{3}{9} \right) + 2 \left( \frac{5}{9} \right) + \frac{7}{9}$$

$$\text{四角形 } A B C D = 6 \left( \frac{1}{9} \right) + 3 \left( \frac{3}{9} \right)$$

$$\text{四角形 } A B C D = 6 \left( \frac{1}{9} \right) + 3 \times \text{四角形 } A B C D / 9$$

$$\text{四角形 } A B C D = 6 \left( \frac{1}{9} \right) + \text{四角形 } A B C D / 3$$

$$\left( \frac{1}{9} \right) = \text{四角形 } A B C D / 9$$

よって、「9」の部分は四角形 A B C D の 1 / 9 であるから

$$\left( 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \right) \times \text{四角形 } A B C D / 9$$

$$= \text{四角形 } A B C D \times 2 / 3$$

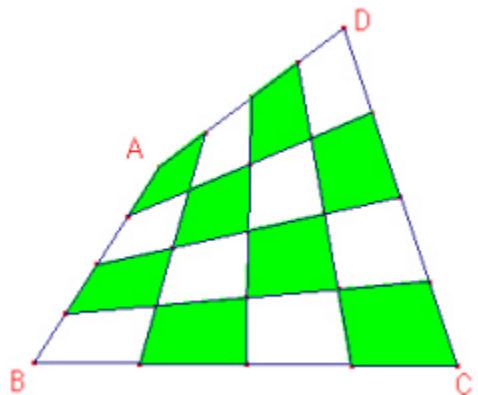
$$\left( 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \right)$$

$$= \text{四角形 } A B C D \times 2 / 3 - \text{四角形 } A B C D / 9$$

$$\left( 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \right) = \text{四角形 } A B C D \times 5 / 9$$

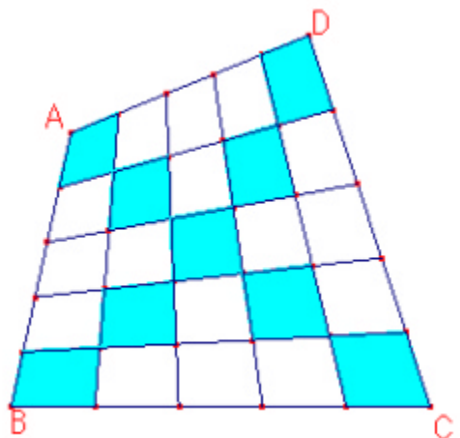
### (3) 四等分の場合

四等分の場合、右の図のように分け、色をつけた部分の面積の合計は、四角形 A B C D の 1 / 2 となる。



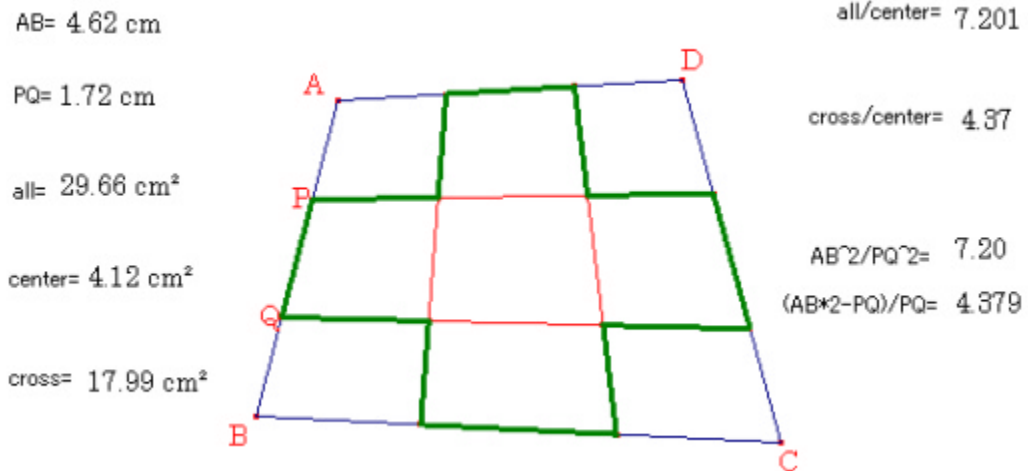
### (4) 五等分の場合

五等分の場合、(1) ~ (3) のような分割方法も同様な性質があるが、右の図のように分け、色をつけた部分の面積の合計は、四角形 A B C D の 9 / 25 となる。

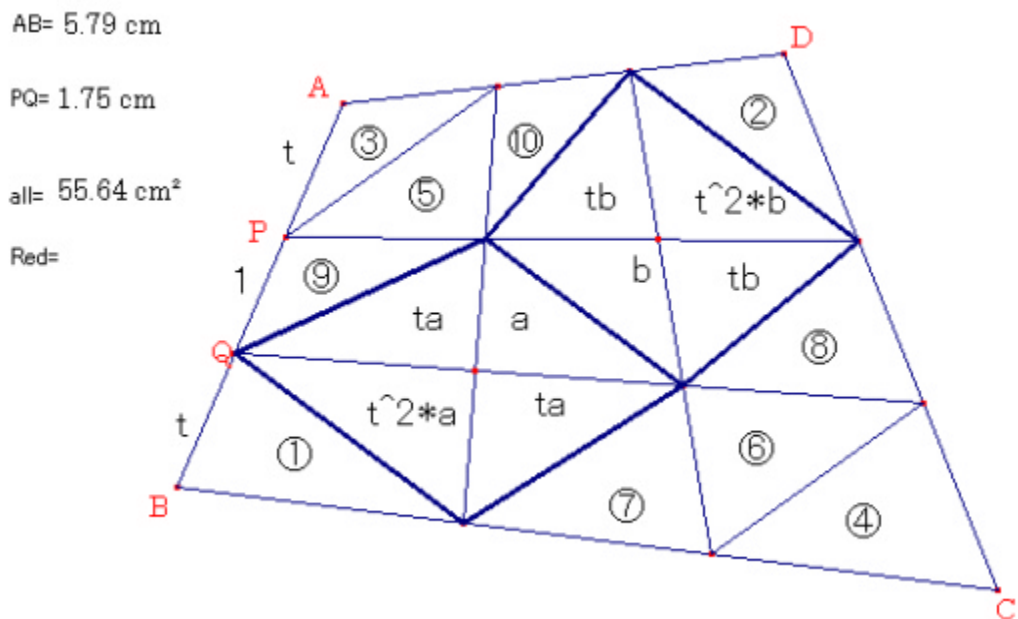


(5) n 等分の場合

図のように  $AP = BQ$  となる点  $P, Q$  を辺  $AB$  上につくり、辺  $AD, BC, DC$  を同じ比に分ける。このとき、四角形  $ABCD$  全体の面積、真ん中の四角形の面積、十字型の面積には図に示された関係がある。



< 四角形  $ABCD$  全体の面積と真ん中の四角形の面積の関係の証明 >



真ん中の部分を図のように a、b に分け、  
 $AP : PQ = t : 1$   
 とすると右の図のように表せるので太線で囲まれた部分の面積の合計は  
 $(t + 1)^2 (a + b)$

また、  
 の部分は、 $t^2 (a + b)$   
 の部分は  $ABCD \times t / (2t + 1)$   
 の部分は  $CDA \times t / (2t + 1)$

したがって + の部分は、  
 四角形  $ABCD \times t / (2t + 1)$

同様にして + の部分も、  
 四角形  $ABCD \times t / (2t + 1)$

また、  
 $(\quad + \quad) : (\quad + \quad + \quad) = t : (t + 1)$

であるから

$$(\quad + \quad + \quad) : (\quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad) = t : (t + 1)$$

$$(\quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad) = \frac{(\quad + \quad + \quad)(t + 1)}{t}$$

$$(\quad + \quad \cdots + \quad) =$$

$$= (t^2 (a + b) + \frac{\text{四角形} ABCD \times t}{2t + 1}) \times \frac{(t + 1)}{t}$$

ここで、真ん中の  $(a + b)$  を X、四角形  $ABCD$  の面積を S とすると、S は太線で囲まれた部分と ~ の和であるから、

$$S = (t + 1)^2 X + \frac{tS}{2t + 1} + (t^2 X + \frac{tS}{2t + 1}) \times \frac{t + 1}{t}$$

$$S = (2t + 1)(t + 1)X + \frac{t(2t + 1)}{(2t + 1)^2} S$$

$$(2t + 1)(t + 1)X = S - \frac{t}{2t + 1} S$$

$$(2t + 1)(t + 1)X = \frac{t + 1}{2t + 1} S$$

$$X = \frac{S}{(2t + 1)^2}$$

つまり、真ん中の部分と四角形  $ABCD$  の面積の比は  $PQ^2 : AB^2$  となる。

### (6) n 等分の場合

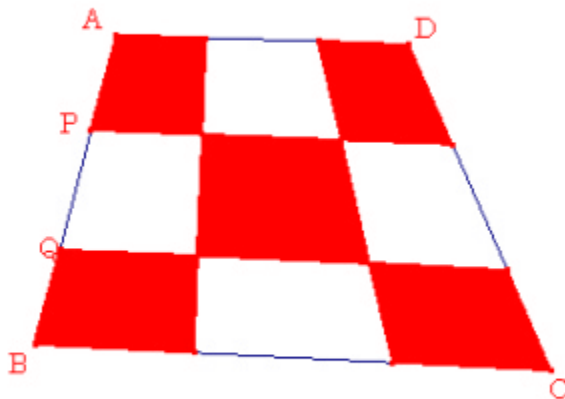
AB= 4.62 cm

red/all= 0.53

PQ= 1.78 cm

all= 26.73 cm<sup>2</sup>

Red= 14.08 cm<sup>2</sup>



AB-PQ= 2.84 cm

$((AB-PQ)^2 + PQ^2) / AB^2 = 0.53$

図のように  $AP = BQ$  となる点  $P, Q$  を辺  $AB$  上につくり、辺  $AD, BC, DC$  を同じ比に分ける。図のように各点を結び、四角形を  $ABCD$  を 9 つに分割したとき、四角形  $ABCD$  全体の面積、色の部分の面積の合計には図に示した関係がある。

### (7) n 等分の場合

AB= 4.62 cm

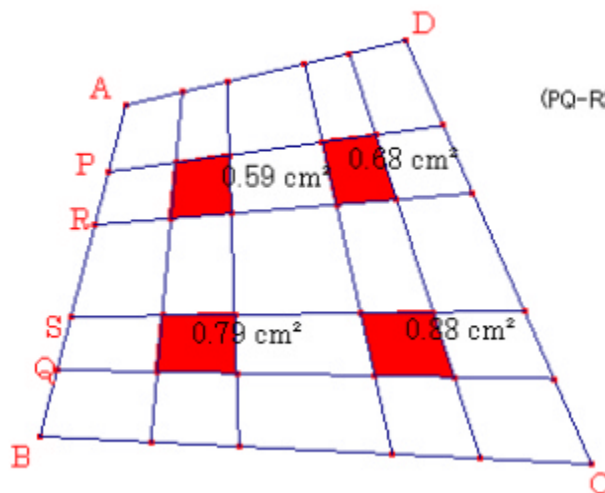
red/all= 0.10

PQ= 2.76 cm

RS= 1.28 cm

all= 28.81 cm<sup>2</sup>

Red= 2.94 cm<sup>2</sup>



$(PQ-RS)^2 / AB^2 = 0.10$

図のように、 $AP = BQ$ 、 $AR = BS$ となる点 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$ を辺 $AB$ 上につくり、辺 $AD$ 、 $BC$ 、 $DC$ を同じ比に分ける。図のように各点を結び、四角形を $ABCD$ を25に分割したとき、四角形 $ABCD$ 全体の面積、色の部分の面積の合計は図に示した性質がある。

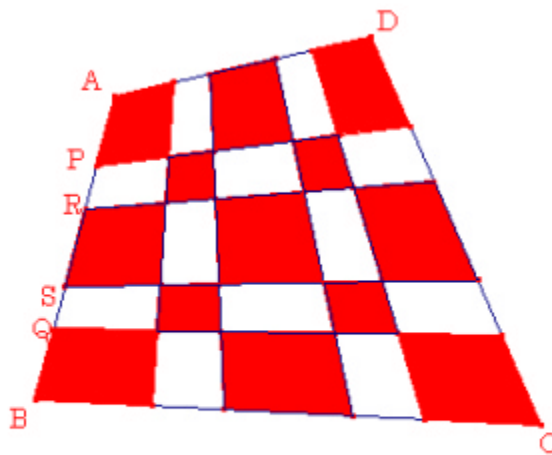
### (8) n等分の場合

$AB = 4.62$  cm  
 $PQ = 2.49$  cm  
 $RS = 1.18$  cm

red/all= Result: 0.59

all=  $28.81$  cm<sup>2</sup>

Red=  $17.09$  cm<sup>2</sup>



$$\frac{((AB-PQ)^2 + (PQ-RS)^2 + RS^2 + 2(AB-PQ) \cdot RS)}{AB^2} = 0.59$$

図のように、 $AP = BQ$ 、 $AR = BS$ となる点 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$ を辺 $AB$ 上につくり、辺 $AD$ 、 $BC$ 、 $DC$ を同じ比に分ける。図のように各点を結び、四角形を $ABCD$ を25に分割したとき、四角形 $ABCD$ 全体の面積、赤い部分の面積の合計は図に示した性質がある。



るがツAしまは  
け求図C応高で  
お探作、対がの  
にののりに力む  
困質在ま形識進  
範性現高図認識層  
いの。が間の一  
高形る。力空へり  
の図え識、形よ  
度る考認に図がし  
由なとのう間研究  
自らかへよ空研究  
りさい形た、るに  
よとな図しば、る展  
やるは面達れ関発  
分すで平発すにの  
部現の、が場質ル  
有実るり念登性一  
共もめよ概がのツ  
たどしに間ル形図  
めな楽場空一図作  
含能層登りツ間と  
も機一のよ図空か  
線定りルに作、空  
曲測よ一Dたり、ない