

「CABRI の部屋」から ～CABRI の活用事例の紹介～

上原永護（群馬県前橋市桂萱中学校）

E-MAIL: mow@mail.wind.ne.jp

1. はじめに

数学教育で様々なテクノロジーを活用した実践が行われている。その中でも作図ツールは、従来の指導では、静的な図形を対象として行うことが多かった図形の学習を、コンピュータの特徴を生かし、グラフィカルでインタラクティブで精緻な図形の学習を実現するものとして注目されている。

作図ツールでは、手軽に作図データを作成することができ、複雑なプログラミング言語を習得する必要もない。簡単な図形データならば、授業時間内で生徒自身が作成することも可能である。

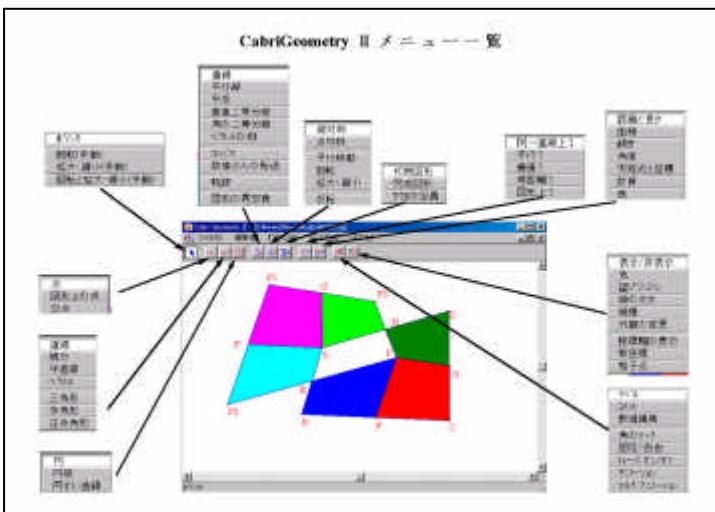
しかし、多様な利用方法を実現するためには授業時間内での作図が難しいものも必要となってくる。そこで、「CABRI の部屋」(<http://www2.wind.ne.jp/mow/math/cabri/>) というWebページを開設し、CABRIで作成した図形の問題及びそのデータを公開している。

右の図のように数多くの作図データを作成しており、図形への関心を高めたり、コンピュータ利用の可能性を感じたりした等の感想をいただいたりしている。しかし、それを授業で実践するとなると、どのような扱い方をしたらよいのか、困惑してしまうという感想もある。

そこで、WebページでCabriGeometry（以下CABRI）の作図データや図形の問題だけでなく、授業展開例について紹介することとした。

2. 授業展開例

授業では、マウスやキーボードの扱い方などのコンピュータの基本操作の習得をしていることが望ましい。数時間、CABRI の操作に慣れ、親しむ時間が確保することができると、課題の数学的な内容により深く取り組むことができるようになる。実際の授業では、そのような時間を確保することが難しいため、左のようなCABRI の機能を説明する資料を配付し、それを参照して授業を行った。



(1) 四角形の変形

四角形を分割し、それを移動させ、組み合わせることによってできる图形を图形の性質から弁別する学習課題である。

2種類の作図データを使用するが、いずれもポイントとなる点をドラッグして移動させることによって、图形が変形するため、視覚的に图形の特徴を捉えることができる。

图形の形状からの弁別だけでなく、四角形や三角形の性質に着目させることにより、筋道立てて图形の性質を説明するものである。三角形・四角形の性質のまとめの段階での学習に適した学習課題である。右の展開例では、1時間での展開例であるため、图形の美しさに关心を持たせることに主眼を置き、論証については正確な記述まで追求していない。

学習指導基準	
本時の目標と展開	
<ul style="list-style-type: none"> 三角形・四角形の性質を用いて图形への理解を深めることによって、图形への理解を深めることに興味を持ち、数学的な圖形の性質から弁別する。 各教科の性質を用いて图形への理解を深めることによって、图形への理解を深めることに興味を持ち、数学的な圖形の性質から弁別する。 	
学習活動	指導上の留意点
<p>① 本時の学習課題を紹介。プラウザを起動し、日本を開く。 http://www2.vsnstar.jp/math/html/sln/</p> <p>「四角形の変形上」のホームページを開き、图形の特徴を解説する。</p> <p>四角形の変形上では、四角形を分割して、各部を移動させることによって、四角形の性質を理解する。また、四角形の性質を理解するためには、四角形の性質を理解する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> プラウザの「お気に入り」やリストに本ページを登録しておこう。 GABRI II を使い、計測機能を用い、点Pを移動させて图形の性質が保たれることを理解させる。
<p>② 「四角形の変形上」のホームページを開き、图形の特徴を解説する。</p> <p>四角形の変形上では、四角形を分割して、各部を移動させることによって、四角形の性質を理解する。また、四角形の性質を理解するためには、四角形の性質を理解する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 四角形の変形上では、四角形を分割して、各部を移動させることによって、四角形の性質を理解する。また、四角形の性質を理解するためには、四角形の性質を理解する。 GABRI II を使い、計測機能を用い、点Pを移動させて图形の性質が保たれることを理解させる。
<p>③ 本時の位置と変形した图形の特徴を確認する。</p> <p>本時の位置と変形した图形の特徴を確認する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 四角形の変形上では、四角形を分割して、各部を移動させることによって、四角形の性質を理解する。また、四角形の性質を理解するためには、四角形の性質を理解する。 GABRI II を使い、計測機能を用い、点Pを移動させて图形の性質が保たれることを理解させる。
<p>④ 本時のまとめをする。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 四角形の変形上では、四角形を分割して、各部を移動させることによって、四角形の性質を理解する。また、四角形の性質を理解するためには、四角形の性質を理解する。 GABRI II を使い、計測機能を用い、点Pを移動させて图形の性質が保たれることを理解させる。

学習指導基準	
本時の目標と展開	
<ul style="list-style-type: none"> 正三角形の性質と三角形の合同条件を使って图形の性質を説明する。 图形を動的に取り組むことにより、图形の美しさに興味・関心を持たせる。 	
学習活動	指導上の留意点
<p>① 本課題に取り組む。</p> <p>△ABCに点Dを取る。△ABDと△ACDが合同であることを証明する。</p> <p>△ABCに点Dを取る。△ABDと△ACDが合同であることを証明する。</p>	<p>△ABCに点Dを取る。△ABDと△ACDが合同であることを証明する。</p> <p>△ABCに点Dを取る。△ABDと△ACDが合同であることを証明する。</p>
<p>② プラウザを開き、日本を開く。 http://www2.vsnstar.jp/math/html/sln/</p> <p>「2つの正三角形PAとT2」のページを開き、GABRI II のデータをダウンロードし、コンピュータ上で图形を動かし課題への理解を深める。</p> <p>△ABCに点Dを取る。△ABDと△ACDが合同であることを証明する。</p>	<p>△ABCに点Dを取る。△ABDと△ACDが合同であることを証明する。</p> <p>△ABCに点Dを取る。△ABDと△ACDが合同であることを証明する。</p>
<p>③ 学習のまとめをする。</p> <p>△ABCに点Dを取る。△ABDと△ACDが合同であることを証明する。</p>	<p>△ABCに点Dを取る。△ABDと△ACDが合同であることを証明する。</p>

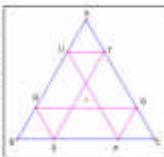
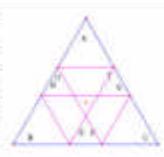
(2) 2つの正三角形

1つの頂点を共有する2つの正三角形をその頂点を中心に回転させたときの图形の性質を追求する課題である。

作図ツールの計測機能や変形機能を使い、視覚的に計量的に性質を検証し、理解を深める。图形の性質による証明も回転角の大きさに負の数の概念を用いることによって、同様に証明できることに気づかせることができる。

图形を動的に、発展的にみることによって、統合的な見方で証明を行う態度を養うことができ、数学的な考え方の育てることができる。また、統合的な見方にたった图形の変形により、图形の美しさを体感することができ、数学的な考え方のよさを得ることもできる。

学習指導案略案

本稿の目標と展開	
<p>○ 作図ツールを使い、条件を満たす四角形として四角形を觀察し、特殊な場合への趣向を見いだしたり、様々な場合を觀察したりして、四角形の性質への理解を深めます。</p> <p>○ 四角形の数学的な美しさと平行四辺形の性質の有用性を感得したり、興味的に課題を追求することをおもしろさに気づかせます。</p>	
学習活動	指導上の留意点
<p>① 本稿の学習課題を知り、ブラウザを起動し、以下のを開く。 http://www.wittax.jp/mathmath/skr/</p> <p>② 講題「正三角形と平行線」のホームページを開き、学習課題を知る。</p> <p>図のように、正三角形 ABC の辺 BC 上の点 P から辺 BC 上に平行な直線を引き、辺 AC との交点を Q とします。同様にして、点 R, S, T, U を作図します。PQRSTU と並んで、点 P が辺 BC 上を移動するとき、四角形 PQRSTU と正三角形 ABC との間にどのような関係があるでしょうか？</p> 	<p>○ ブラウザの「お気に入り」やリンク集にホームページを登録してください。</p> <p>○ 予想をさせた後に、その予想が正しいか否かを CABRI II を使って調べさせます。</p>
<p>○ 図形データをダウンロードした图形を動かして、大きさを変えたときに、图形の特徴をどのようにして、点 P, Q, R, S, T, U を動かして、簡単に説明できるかを考えます。</p> 	<p>○ 点 P を移動させると正三角形に近づいていくことに気づかせます。大きさが等しいことに気づかせます。</p> <p>○ 大きさを測定しないで、直角を移動させ、四角形でどちらの性質が保たれることかを確認させます。</p> <p>○ 計算機能でよりも性質を利用、中心に無い、平行四辺形の性質なども調べて、簡単に説明できる程度にとどめます。</p>
<p>③ 講題「三角形と平行線」のホームページの三つの場合について調べる。</p>	<p>○ 正三角形の場合を調べたが、それを基準して考え方を、一般の三角形の場合で関心を尋たせて後に説明する。</p>
<p>④ 本稿のまとめをする。</p>	<p>○ 四角形の数学的な美しさと平行四辺形の性質の有用性を感得させる。</p> <p>○ 興味課題を追求することをおもしろさに気づかせます。</p>

(3) 三角形と平行線

正三角形という整った図形において、図のように平行線を結んでいくと最初の点を再び通るが、そのときのできる図形の性質を調べる課題である。

ここでは、最初の点を再び通ることの証明にはふれず、図形の性質を追求し、図形の美しさや不思議さに触れ、図形への興味・関心を高めることを主眼とした授業展開例を示した。

また、正三角形という特殊な図形から条件を拡大しても、その性質が保存されることに気づかせ、特殊から一般へと思考を拡大する数学的な見方・考え方をのばすことができる。さらに、三角形から四角形へと発展させ、同様の性質がないかを追求させ、「四角形と平行線」のデータを利用した授業展開につなげていく授業展開もできる。

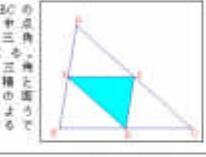
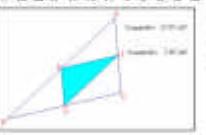
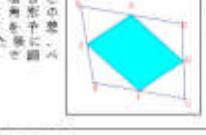
(4) 三角形の中の三角形

相似な図形の面積比から、図形の性質を調べ、外側の三角形と内側の図形の関係としてとらえる。そして、その図形が中点を結んでできた図形であることから、中点を結んでできる図形の性質を追求するという視点から、四角形の場合の図形の性質を考察する課題である。

作図ツールの計測機能・変形機能を用いて、面積の関係だけなく、図形の形状にも着目させ、さらに図形の性質への理解を深めることができる。

また、より積極的に図形を変形し、外側の四角形を凹四角形の場合についても同様の性質があることに気づかせ、その理由を追及する授業展開も行うことができる。

学習指導案略案

本稿の目標と展開	
<p>○ 簡単な図形の面積比を扱い、様々な図形の性質を導くことができるることをとどめ、自然の性質への理解を深めます。</p> <p>○ 図形の数学的な美しさを感得したり、興味課題を追求することをおもしろさに気づかせます。</p>	
学習活動	指導上の留意点
<p>① 本稿の学習課題を知り、ブラウザを起動し、以下のを開く。</p> <p>② 講題「三角形の中の三角形」のホームページを開き、学習課題に取り組む。</p> <p>三角形 ABC の 3 つの辺の中点 D, E, F を結び三角形 DEF をつくる。このとき、三角形 ABC の面積と三角形 DEF の面積は、どのくらい異なるのでしょうか？</p> 	<p>○ 計算は、作図ツールを使わずに手計算で求めます。</p> <p>○ 簡単な図形の面積比を扱い、簡単に面積比を求める程度にします。</p>
<p>③ 図形データをダウンロードし、図形を動かしたり、図形の大きさを変えて面積が変わることを確かめる。</p> 	<p>○ 作図ツールの計測機能、計算機能を利用して、面積の関係を調べさせます。</p> <p>○ 三角形の性質を調べた後に、算術的に考え方を考察させ、四角形の中の図形の性質に関心を持たせます。</p>
<p>④ 三角形の中の三角形との関係を予想し、証明した後に、作図ツールを調べる。</p> 	<p>○ 三角形のときと同じように、同様に証明できます。</p> <p>○ 図形の数学的な美しさを感得させます。</p>
<p>⑤ 本稿のまとめをする。</p>	<p>○ 図形の数学的な美しさを感得させます。</p>

(5) 四角形の分割

四角形の中点の結び、線分 P R、 Q S によって 4 つに分割し、四角形 A B C D を変形させても保たれる図形的な性質を追求する課題である。当初、特質すべきものがないように見えるが、 C A B R I で分割してできた 4 つの四角形の面積を測定し、計算機能を利用して調べてみると、四角形 A B C D を変形させても、次の関係が成り立つことが分かる。

四角形ABQS + 四角形CBQQ

$$= \text{四角形 } BQOP + \text{四角形 } DSQB$$

≡ 四角形 A B C D ÷ 2

この性質に気づかせるには射影幾何の問題であることから、四角形が正方形の場合をしらべ、特殊から一般へ思考を拡大させる方法も有効である。さらにこのような分割方法を行った場合の四角形の性質について深く追求する展開例となっている。

(6) 図形の移動

線対称移動、回転移動の対応する線分の位置関係を追求する学習課題である。三角形の線対称移動の作図は比較的容易であるため、生徒に作図から始めさせることも可能である。図形の形状を様々に変化させながらも保たれる図形の性質を視覚的に表し、図形の移動に伴う、図形的性質を動的にとらえ、理解を深めるものである。作図ツールの機能を生かすことのできる課題であり、自由に図形を移動させながら、対応する線分が平行である場合を調べ、概念を拡張したり、回転移動の特殊な場合である点対称移動の性質に気づいたりすることができ、生徒が図形の性質を主体的に発見することができる。

学年	目標	実現度
1年	○ 作図より、点移動の性質を学ぶ。 △ 作図で、点移動の性質を学ぶ。	○ 作図より、点移動の性質を学ぶ。
2年	○ 本時の学習課題を知り、ブラウザを起動し、以下のURLを開く。 http://www2.konicaminolta.com/edu	○ 本時の学習課題を知り、ブラウザを起動し、以下のURLを開く。
3年	○ 「点移動」のホームページを開き、課題を知る。 △ ABCをA'に移す直線を対称軸として対称移動し、△ A'B'C'を得ます。 このとき、ABとA'B'は、BCとB'C'は、CAとC'A'は、どのよう位移があるかがわかる。	○ 「点移動」のホームページを開き、課題を知る。
4年	○ GABRIEL上で、△ABCをA'に移す直線を引いて、△A'B'C'を得ます。 △ ABCをA'に移す直線を引いて、△A'B'C'を得ます。	○ GABRIEL上で、△ABCをA'に移す直線を引いて、△A'B'C'を得ます。
5年	○ 「点移動」のホームページを開き、課題を知る。	○ 「点移動」のホームページを開き、課題を知る。
6年	△ ABCをA'に移す直線を引いて、△A'B'C'を得ます。	△ ABCをA'に移す直線を引いて、△A'B'C'を得ます。
7年	○ 本時のまとめをする。	○ 本時のまとめをする。

学習指導案略案

本時の目標と展開

- 作図ツールを使い、図形を動的に上えることによって、图形を統合的にとらえ、图形の性質への理解を深める。
- 課題の数学的な美しさを感じたり、興味的に課題を追求することの楽しさに気づかせる。

学習活動

- ① 本時の学習課題を知り、ブラウザを起動し、HPを開く。
<http://www2.vndz.jp/math/math/>

- ② 講題「平行線と中点」のホームページを開き、学習課題を知る。

図は、 $ABCD$ であります。 M 、 N はそれそれぞれ辺 AB 、 CD の中点になっています。

点 D は、線分 EF 上を移動します。このとき、線分 AD 、 MN 、 BC の長さの関係はどうようになっているでしょうか？ AD 、 MN の長さは右側を下の方へとします。（例えば、点 D が点 A より左側にあるとき） AD は MN より長い証明の数式をします。

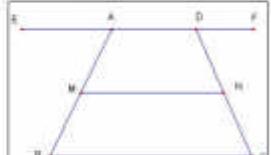
- ③ 図形の数学的な美しさと統合的な見方の楽しさを感じることをめざす。デジタル動画を再生する。

- ④ 点 D がに直角のとき、直角の性質を用いて、 AD と MN と BC の長さを比較する。

- ⑤ 本時のまとめをする。

- ブラウザの「お気に入り」やリンク集にホームページを登録しておく。

- ② 講題は、作図ツールを使わずに図に示された状態の图形の性質を導き出せ。いくつかの証明方法を追求させる。



- 作図ツールを用いて計算機能、計算機能を利活用して、 AD 、 MN 、 BC の関係を調べてみる。
- ある点 A の右側にある場合について調べてみるが、 MN の長さの変化のようすに大きな変化がないことをから。 AD 、 MN 、 BC の関係が導かれていくことに気づかせる。

- ③ $(BC+AD)$ ではなく、 $(BC-AD)$ となることを图形の性質を用いて説明するだけではなく、直角の性質を用いることに焦点を当てて、統合的にみることができるることを理解させる。

- ④ 図形の数学的な美しさと統合的な見方の楽しさを感じることをめざす。

(7) 平行線と中点

図のような位置関係にある3本の線分の長さの関係を追求する学習課題である。全く異なるようにみえる3つの場合を場合分けをして証明することが多いが、これらを作図ツールを使い、連続的に変化させることにより関連ある图形であることに気づかせることができる。線分の長さにベクトルの概念を用いたり、引き算を負の数を加えるという見方を用いることにより、3つの場合を1つのものとしてとらえ、統合的な見方を培うことができる学習課題である。また、ここでは、基本となる最初の図形の証明は論理的な記述は簡単に扱うが、補助線を入れ、測定機能や図形変形機能を使い、形式的な証明を実感の伴った証明とし、理解を深めることもできる。

(8) 比例と反比例

比例・反比例をグラフで表し、比例定数とグラフの特徴の関係を追求する学習課題である。

作図ツールをグラフツールとして利用しているが、作図ツールの特徴であるアニメーション機能を比例定数に用い、グラフを連続的に変化させたり、図形の軌跡を表示する機能を用い、グラフの変化の様子を複数、同時に表現するとともにグラフによって描かれる图形のデザイン性に気づかせ、数学の視覚的な美しさにも気づかせることができることが手軽にできる。

比例・反比例という単純なグラフではあるが、今後、より高次な関数を学習する際、それを数式処理ソフトを使って表現しようとする意欲を育てることができる。

学習指導案略案

本時の目標と展開

- グラフと測定機能の関係を調べ、比例・反比例への導入を深める。
- グラフの数学的な美しさを感じたり、グラフを動的に使えることの楽しさに気づかせる。

学習活動

- ① 本時の学習課題を知り、ブラウザを起動し、HPを開く。
<http://www2.vndz.jp/math/math/>

- ② 講題「比例のグラフ」のホームページを開き、学習課題をやり、数値を変化させて、グラフを描く。

- ③ CAD用Tのトライニティス機能を用いて、グラフの特徴を動的に観察する。

- ④ 「比例のグラフ」の特徴を用いて、比例の性質を理解する。

- ⑤ 本時のまとめをする。

- ブラウザの「お気に入り」やリンク集にホームページを登録しておく。

- CABRI II のデータをダブルクリックして、数値をクリップした後に、▲▼をクリックして直線群にグラフを変化させる。

- 分数を使ったり、無理な数を小数に直したりして、直線群に変化させ、グラフの傾きと比例定数との関係を考察させる。

- アニメーションとトレース機能を組み合わせることにより、グラフを動的に授業させること。

- 数値を細かく変化させ、直線群が直線群であることに気づかせる。

- アニメーションとトレース機能を組み合わせることにより、グラフを動的に授業させること。

- グラフを比例定数の関係を確認するとともにグラフの数学的な美しさに気づかせる。

- 本題を追求することの楽しさに気づかせる。

3. 終わりに

学習スタイルの変化

従来のコンパスと定規での作図による図形の性質の探求では、作図の難しさ（時間・労力・精度）等のため、効率が悪く、アイデアが浮かんでも、作図することによって、その有効性を確かめることが難しかった。そのため、いくつかの作図をした程度で、図形の性質から論理的に証明していくこととなり、長い時間をかけて追求した結果、成立するか否かも見いだせずに終わってしまうことも少なくなく、図形の学習への意欲を減衰させる結果になることもあった。

作図ツールでは、図形の変形機能により、発見した性質が作図条件によるものであるか、偶然作図した特殊なものであるかを容易に判断できるため、様々なアイデアの検討が短時間に行なうことができるようになった。そのため、論理的に成立することへの確信を持って、論証に取り組めるため、図形の性質の探求をより積極的に行なうことができた。

また、測定機能・計算機能と変形機能により、論理的に考え、複雑な図形の特徴も測定値を使った式を作成し、その有効性を確かめることもできた。

教材の多様化

これまで複数な図形を関連付け、統合的な見方で図形の性質を追求する学習も行われてきたが、それを単に念頭操作でイメージするだけでなく、作図ツールで視覚的に表現し、自由に何度も自分のペースで連続的に表現したり、数値で表現し、量的に把握したりし、理解を深めることもできた。また、作図ツールによって、グラフ表現することによって、グラフを図形的に特徴を調べたり、図形とグラフの関係を調べることもできた。作図ツールによって、数量領域の教材と図形領域の教材をクロスして扱うこともでき、数学への興味関心を高めたり、数学的な理解をより深めることができた。

手軽な学習ツール

生徒が自分でコンピュータを操作する授業展開だけでなく、普通教室でTVや液晶プロジェクターを使って教師用PC1台を使って行う授業展開でも、十分な成果を得ることができだけの表現力が作図ツールにはある。また、複雑なプログラミングも不要で、グラフィックソフトで線を引いたり、四角形を描いたりするのと同様の操作方法で作図データを作成することもできる。国内だけでなく、世界的にも多くの地域で作図ツールは利用されており、インターネットの普及に伴い、急速に作図データの公開を行うWebページも多くなってきている。そこでは、有名な数学的な性質を持った図形データを始め、多様な作図データが公開されているため、ダウンロードするだけで可能で、選択教科において幅の広い学習も行なうことができる。

今後の課題

コンピュータの活用が各教科、総合的な学習などで盛んになり、より身近な学習ツールとしてコンピュータが使われるようになってきている。また、かつて高価であった電卓も普及し、正確さと速度を要求された計算能力に対する概念も変わりつつあるように、コンピュータの普及により、数学科における指導内容を変革していくことが必要になりつつある。そのため、作図ツールの機能を生かした教材の開発や選択教科の時間を使った生徒による図形の性質の探求など多様な学習活動を行なうなければならない。